第５講　図形の性質

1

(1)　円と直線に関する次の**定理**を考える。

> **定理**　3 点 P，Q，R は一直線上にこの順に並んでいるとし，点 T はこの直線上にないものとする。このとき，$PQ \cdot PR = PT^2$ が成り立つならば，直線 PT は 3 点 Q，R，T を通る円に接する。

この**定理**が成り立つことは，次のように説明できる。

直線 PT は 3 点 Q，R，T を通る円 O に接しないとする。このとき，直線 PT は円 O と異なる 2 点で交わる。直線 PT と円 O との交点で点 T とは異なる点を T′ とすると

$$PT \cdot PT' = \boxed{ア} \cdot \boxed{イ}$$

が成り立つ。点 T と点 T′ が異なることにより，$PT \cdot PT'$ の値と PT^2 の値は異なる。したがって，$PQ \cdot PR = PT^2$ に矛盾するので，背理法により，直線 PT は 3 点 Q，R，T を通る円に接するといえる。

ア，イ の解答群（解答の順序は問わない。）

⓪　PQ	①　PR	②　QR	③　QT	④　RT

（次ページに続く。）

(2)　△ABC において，$AB=\frac{1}{2}$，$BC=\frac{3}{4}$，$AC=1$ とする。

このとき，∠ABC の二等分線と辺 AC との交点を D とすると，$AD=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ である。直線 BC 上に，点 C とは異なり，BC＝BE となる点 E をとる。∠ABE の二等分線と線分 AE との交点を F とし，直線 AC との交点を G とすると

$$\frac{AC}{AG}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}},\quad \frac{\triangle ABF\text{ の面積}}{\triangle AFG\text{ の面積}}=\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

である。

線分 DG の中点を H とすると，$BH=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$ である。また

$$AH=\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}},\quad CH=\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である。

△ABC の外心を O とする。△ABC の外接円 O の半径が

$\frac{\boxed{ソ}\sqrt{\boxed{タチ}}}{\boxed{ツテ}}$ であることから，線分 BH を 1：2 に内分する点を I とすると

$$IO=\frac{\boxed{ト}\sqrt{\boxed{ナ}}}{\boxed{ニヌ}}$$

であることがわかる。

2　点 Z を端点とする半直線 ZX と半直線 ZY があり，$0° < \angle XZY < 90°$ とする。また，$0° < \angle SZX < \angle XZY$ かつ $0° < \angle SZY < \angle XZY$ を満たす点 S をとる。点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円を作図したい。

円 O を，次の (Step 1)～(Step 5) の**手順**で作図する。

手順

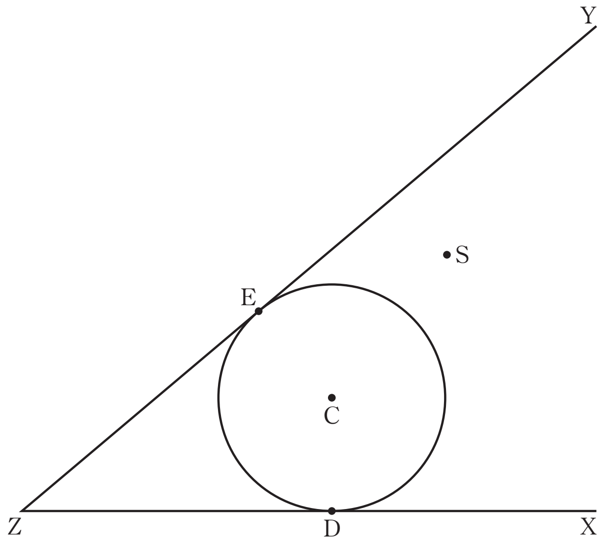
(Step 1)　$\angle XZY$ の二等分線 ℓ 上に点 C をとり，下図のように半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円 C を作図する。また，円 C と半直線 ZX との接点を D，半直線 ZY との接点を E とする。

(Step 2)　円 C と直線 ZS との交点の一つを G とする。

(Step 3)　半直線 ZX 上に点 H を $DG /\!/ HS$ を満たすようにとる。

(Step 4)　点 H を通り，半直線 ZX に垂直な直線を引き，ℓ との交点を O とする。

(Step 5)　点 O を中心とする半径 OH の円 O をかく。



参考図

（次ページに続く。）

(1)　(Step 1)～(Step 5) の**手順**で作図した円 O が求める円であることは，次の**構想**に基づいて下のように説明できる。

構想

円 O が点 S を通り，半直線 ZX と半直線 ZY の両方に接する円であることを示すには，OH＝[ア]が成り立つことを示せばよい。

作図の**手順**より，△ZDG と △ZHS との関係，および △ZDC と △ZHO との関係に着目すると

DG：[イ]＝[ウ]：[エ]

DC：[オ]＝[ウ]：[エ]

であるから，DG：[イ]＝DC：[オ]となる。

ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，∠CDG＝∠[カ]であるので，△CDG と△[カ]との関係に着目すると，CD＝CG より OH＝[ア]であることがわかる。

なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，DG＝[キ]DC となり，DG：[イ]＝DC：[オ]より OH＝[ア]であることがわかる。

[ア]～[オ]の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい。）

⓪ DH	① HO	② HS	③ OD	④ OG
⑤ OS	⑥ ZD	⑦ ZH	⑧ ZO	⑨ ZS

[カ]の解答群

⓪ OHD	① OHG	② OHS	③ ZDS
④ ZHG	⑤ ZHS	⑥ ZOS	⑦ ZCG

（次ページに続く。）

(2)　点Sを通り，半直線ZXと半直線ZYの両方に接する円は二つ作図できる。特に，点Sが∠XZYの二等分線ℓ上にある場合を考える。半径が大きい方の円の中心をO_1とし，半径が小さい方の円の中心をO_2とする。また，円O_2と半直線ZYが接する点をIとする。円O_1と半直線ZYが接する点をJとし，円O_1と半直線ZXが接する点をKとする。

作図をした結果，円O_1の半径は5，円O_2の半径は3であったとする。このとき，$\mathrm{IJ}=$ **ク** $\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}$ である。さらに，円O_1と円O_2の接点Sにおける共通接線と半直線ZYとの交点をLとし，直線LKと円O_1との交点で点Kとは異なる点をMとすると

$$\mathrm{LM}\cdot\mathrm{LK}=\boxed{\text{サシ}}$$

である。

また，$\mathrm{ZI}=$ **ス** $\sqrt{\boxed{\text{セソ}}}$ であるので，直線LKと直線ℓとの交点をNとすると

$$\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}}=\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \mathrm{SN}=\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

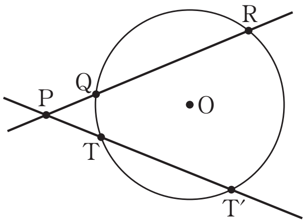
である。

第５講　図形の性質

1 ⑴　方べきの定理により

$PT\cdot PT'=PQ\cdot PR$

（⓪）（①）



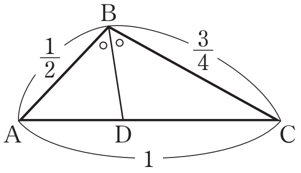
点 T と点 T′ が異なることより $PT\cdot PT'\neq PT^2$

よって，定理の仮定 $PQ\cdot PR=PT^2$ に矛盾する。

⑵　角の二等分線の性質より

$AD:CD=BA:BC=2:3$

よって　$AD=\frac{2}{5}AC=\frac{2}{5}\times 1=\frac{2}{5}$



外角の二等分線の性質より

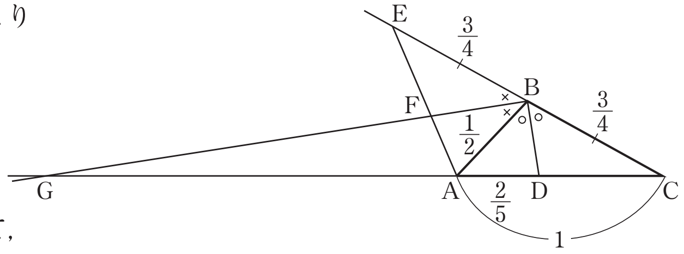
$AG:GC=BA:BC=2:3$

よって　$AG:AC=2:1$ より

$\frac{AC}{AG}=\frac{1}{2}$

$AC=1$ より

$AG=2$



△CGB と直線 AE について，

メネラウスの定理により

$$\frac{CE}{EB}\cdot\frac{BF}{FG}\cdot\frac{GA}{AC}=1$$

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{BF}{FG}\cdot\frac{2}{1}=1 \qquad \frac{BF}{FG}=\frac{1}{4}$$

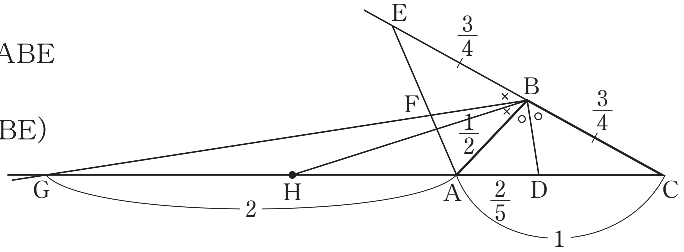
よって　$\frac{\triangle ABF\text{ の面積}}{\triangle AFG\text{ の面積}}=\frac{BF}{FG}=\frac{1}{4}$

$\angle DBG=\angle DBA+\angle ABG$

$=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ABE$

$=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ABE)$

$=\frac{1}{2}\cdot 180^\circ=90^\circ$



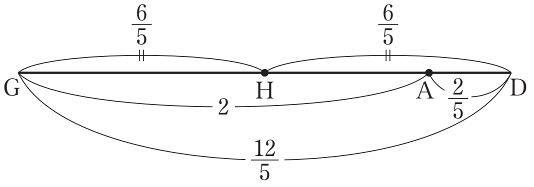
よって，点 H は △BDG の外接円の中心であり，

DG はこの円の直径，BH は半径である。

したがって

$$BH=\frac{1}{2}DG=\frac{1}{2}\left(2+\frac{2}{5}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{12}{5}=\frac{6}{5}$$

また，$GH=DH=\frac{6}{5}$ より



$AH=AG-GH=2-\frac{6}{5}=\frac{4}{5}$

$CH=AC+AH=1+\frac{4}{5}=\frac{9}{5}$

△ABC で余弦定理により

$$\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-CA^2}{2\cdot AB\cdot BC}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2-1^2}{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}}=\frac{2^2+3^2-4^2}{2\cdot 2\cdot 3}=-\frac{1}{4}$$

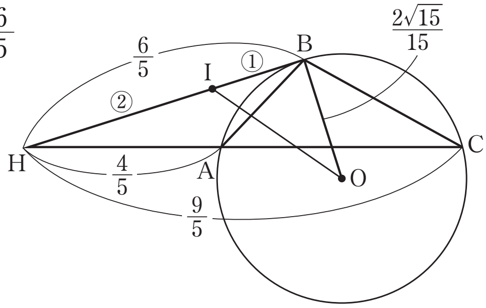
$$\sin\angle ABC=\sqrt{1-\cos^2\angle ABC}=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{15}}{4}$$

よって，△ABC の外接円 O の半径 R は，正弦定理により

$$2R=\frac{AC}{\sin\angle ABC}=\frac{1}{\frac{\sqrt{15}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{15}}$$

$$R=\frac{2}{\sqrt{15}}=\frac{2\sqrt{15}}{15}$$

$HA\cdot HC=\frac{4}{5}\cdot\frac{9}{5}=\frac{36}{25}$，　$HB^2=\left(\frac{6}{5}\right)^2=\frac{36}{25}$



よって，(1)より直線 HB は円 O に接する。

したがって，$\angle HBO=90^\circ$

$BI=\frac{1}{3}BH=\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{5}=\frac{2}{5}$，

$BO=R=\frac{2\sqrt{15}}{15}$ より

△OBI で三平方の定理を用いて

$$IO=\sqrt{BI^2+BO^2}=\frac{2}{15}\sqrt{3^2+(\sqrt{15})^2}=\frac{2}{15}\sqrt{24}=\frac{4\sqrt{6}}{15}$$

2 (1)　OH＝OS（⑤）を示せばよい。

作図の手順より

△ZDG∽△ZHSであるから

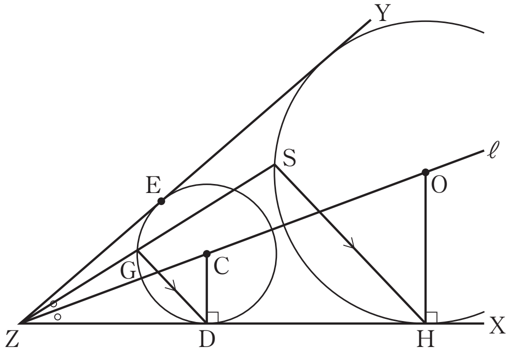
DG：HS＝ZD：ZH

（②）（⑥）（⑦）

△ZDC∽△ZHO であるから

DC：HO＝ZD：ZH

（①）



よって，DG：HS＝DC：HO

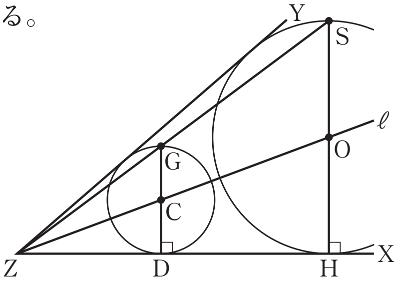
ここで，3 点 S，O，H が一直線上にない場合は，$\angle\mathrm{CDG}=\angle\mathrm{OHS}$（②）であるので，$\triangle\mathrm{CDG}\backsim\triangle\mathrm{OHS}$ である。

よって，$\mathrm{CD}=\mathrm{CG}$ より $\mathrm{OH}=\mathrm{OS}$ であることがわかる。

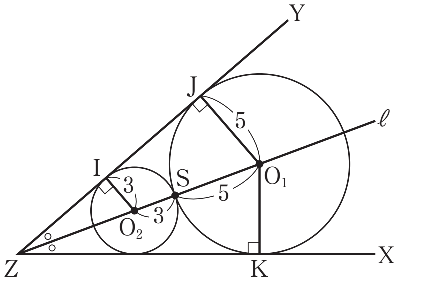
なお，3 点 S，O，H が一直線上にある場合は，

$\mathrm{DG}=2\mathrm{DC}$ となり，$\mathrm{DG}:\mathrm{HS}=\mathrm{DC}:\mathrm{HO}$ より

$\mathrm{OH}=\mathrm{OS}$ であることがわかる。



(2)



三平方の定理より　$\mathrm{IJ}=\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$

方べきの定理より　$\mathrm{LM}\cdot\mathrm{LK}=\mathrm{LS}^2$

ここで，$\mathrm{LI}=\mathrm{LS}=\mathrm{LJ}$ より

$$\mathrm{LS}=\frac{1}{2}\mathrm{IJ}=\sqrt{15}$$

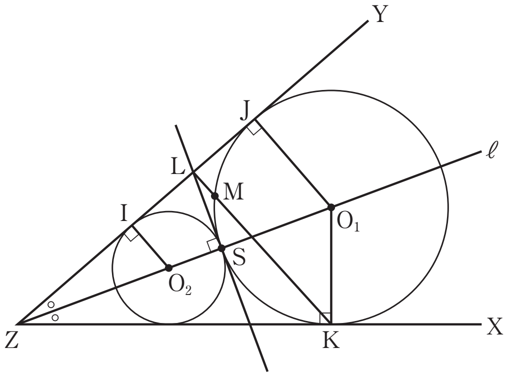
したがって，$\mathrm{LM}\cdot\mathrm{LK}=(\sqrt{15})^2=15$

また，$\triangle\mathrm{ZO_2I}\backsim\triangle\mathrm{ZO_1J}$ より，

$$\mathrm{ZI}:\mathrm{ZJ}=\mathrm{O_2I}:\mathrm{O_1J}$$

$\mathrm{ZI}=x$ とおくと，$x:(x+2\sqrt{15})=3:5$

$x=3\sqrt{15}$　　　よって，$\mathrm{ZI}=3\sqrt{15}$



角の二等分線の性質より

$$\frac{\mathrm{LN}}{\mathrm{NK}}=\frac{\mathrm{ZL}}{\mathrm{ZK}}=\frac{\mathrm{ZL}}{\mathrm{ZJ}}=\frac{\mathrm{ZI}+\mathrm{IL}}{\mathrm{ZI}+\mathrm{IL}+\mathrm{LJ}}=\frac{3\sqrt{15}+\sqrt{15}}{3\sqrt{15}+\sqrt{15}+\sqrt{15}}=\frac{4\sqrt{15}}{5\sqrt{15}}=\frac{4}{5}$$

直角三角形 ZLS で

$\mathrm{ZL}:\mathrm{LS}=4\sqrt{15}:\sqrt{15}=4:1$ より

$\mathrm{ZL}:\mathrm{LS}:\mathrm{ZS}=4:1:\sqrt{4^2-1^2}=4:1:\sqrt{15}$

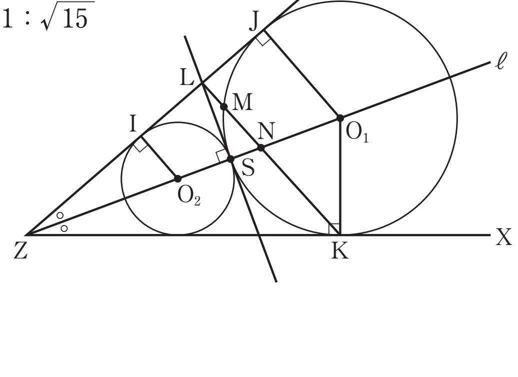
よって，$\mathrm{ZS}=\sqrt{15}\,\mathrm{LS}=15$

また，点 K から直線 ℓ に垂線を下ろし，

直線 ℓ との交点を P とすると

$\triangle\mathrm{LSN}\backsim\triangle\mathrm{KPN}$ であることから，

$$\mathrm{KP}=\frac{5}{4}\mathrm{LS}=\frac{5\sqrt{15}}{4}$$



直角三角形 ZKP で

　$\mathrm{ZK}:\mathrm{KP}=5\sqrt{15}:\dfrac{5}{4}\sqrt{15}=4:1$ より

　$\mathrm{ZK}:\mathrm{KP}:\mathrm{ZP}=4:1:\sqrt{15}$　　よって，$\mathrm{ZP}=\sqrt{15}\,\mathrm{KP}=\dfrac{75}{4}$

したがって，$\mathrm{SP}=\mathrm{ZP}-\mathrm{ZS}=\dfrac{75}{4}-15=\dfrac{15}{4}$

ゆえに，$\mathrm{SN}=\dfrac{4}{4+5}\mathrm{SP}=\dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{15}{4}=\dfrac{5}{3}$